第５講　微分法，積分法①

1　曲線 $y=x^3$ について

(1)　この曲線上の相異なる３点 $\mathrm{A}(a,\ a^3)$，$\mathrm{B}(b,\ b^3)$，$\mathrm{C}(c,\ c^3)$ が同一直線上にあるための a，b，c の条件を求めよ．

(2)　点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ よりこの曲線に相異なる３本の接線が引けるとき，α，β の条件を求め，点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ の存在範囲を図示せよ．

(3)　(2)のとき，３つの接点を頂点とする三角形の重心の座標を α，β を用いて表せ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　正の数 a に対し，関数

$$y=x^2-ax \quad \left(\frac{a}{6} \leqq x \leqq \frac{5a}{6}\right)$$

のグラフを C とする．長方形 T で１辺が x 軸に含まれ，その対辺の両端が C 上にあるものをすべて考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　長方形 T の周の長さの最大値を，a を用いて表せ．

(2)　長方形 T の面積の最大値を，a を用いて表せ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］ $f(x)=\int_0^2 |t(t-x)|dt$ について

(1) $0 \leqq x \leqq 2$ のとき，$f(x)$ を求めよ．

(2) $\int_{-1}^2 f(x+1)dx$ を求めよ．

［2］ $f(x)=4x^2-3ax+4\int_0^1 tf(t)dt$，$g(x)+\int_0^x (t+1)g'(t)dt=x^2+4x+a$ のとき

(1) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ．

(2) 方程式 $f(x)-xg(x)=0$ の 2 解を α，β として，

$$h(a)=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta (3x^2-2ax+a^2)dx$$ の最小値を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　微分法，積分法①

1　曲線 $y=x^3$ について

(1)　この曲線上の相異なる３点 $\mathrm{A}(a,\ a^3)$，$\mathrm{B}(b,\ b^3)$，$\mathrm{C}(c,\ c^3)$ が同一直線上にあるための a，b，c の条件を求めよ．

(2)　点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ よりこの曲線に相異なる３本の接線が引けるとき，α，β の条件を求め，点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ の存在範囲を図示せよ．

(3)　(2)のとき，３つの接点を頂点とする三角形の重心の座標を α，β を用いて表せ．

(1)　直線 AB と直線 AC（共に A を通る）の傾きが等しければよい．

$$\frac{b^3-a^3}{b-a}=\frac{c^3-a^3}{c-a}\qquad b^2+ba+a^2=c^2+ca+a^2\qquad (b-c)(a+b+c)=0$$

$b\neq c$ であるから　$\boldsymbol{a+b+c=0}$

(2)　$y=x^3$　より　$y'=3x^2$

$x=t$ におけるこの曲線の接線の方程式は　$y=3t^2(x-t)+t^3$ より，$y=3t^2x-2t^3$

これが点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ を通るとき，$\beta=3t^2\alpha-2t^3$ であるから，$2t^3-3\alpha t^2+\beta=0$　……①

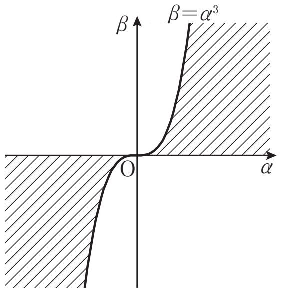
３次関数は接点が異なれば接線も異なるので，題意を満たすのは t の方程式①が異なる３つの実数解をもつときである．

$f(t)=2t^3-3\alpha t^2+\beta$ とおくと，$f'(t)=6t^2-6\alpha t=6t(t-\alpha)$ である．

求める条件は $f(t)$ が２極値をもち，それが異符号であることである．

よって　$f(0)\cdot f(\alpha)<0$ より，$\beta(\beta-\alpha^3)<0$

これより　$\boldsymbol{\begin{cases}\beta>\alpha^3\\ \beta<0\end{cases}}$　**または**　$\boldsymbol{\begin{cases}\beta<\alpha^3\\ \beta>0\end{cases}}$　したがって，点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ の存在範囲は右図の斜線部分（境界含まない）．



(3)　３接点を $(a,\ a^3)$，$(b,\ b^3)$，$(c,\ c^3)$ とすると，三角形ができるためには(1)より　$a+b+c\neq 0$　……②

このとき，この３点の重心 $(x,\ y)$ の座標は　$x=\dfrac{a+b+c}{3}$，$y=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}$

a，b，c は①の３解より，解と係数の関係から

$$a+b+c=\frac{3}{2}\alpha\ \text{（(2)より }\alpha\neq 0\text{．よって②を満たす）},\ ab+bc+ca=0,\ abc=-\frac{\beta}{2}$$

$$2a^3-3\alpha a^2+\beta=0\ \text{より}\quad a^3=\frac{3\alpha a^2-\beta}{2}\quad\text{同様に}\quad b^3=\frac{3\alpha b^2-\beta}{2},\ c^3=\frac{3\alpha c^2-\beta}{2}$$

よって　$x=\dfrac{\alpha}{2}$，

$$y=\frac{1}{2}\{\alpha(a^2+b^2+c^2)-\beta\}=\frac{1}{2}\{\alpha(a+b+c)^2-\beta\}\ \text{（}ab+bc+ca=0\text{ より）}$$

$$=\frac{9}{8}\alpha^3-\frac{1}{2}\beta$$

以上より，求める重心の座標は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{2}\alpha,\ \dfrac{9}{8}\alpha^3-\dfrac{1}{2}\beta\right)}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　正の数 a に対し，関数

$$y=x^2-ax \quad \left(\frac{a}{6}\leqq x\leqq\frac{5a}{6}\right)$$

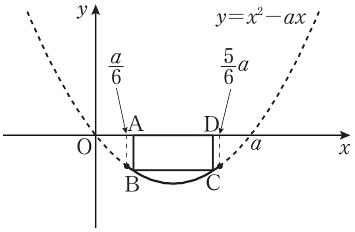
のグラフを C とする．長方形 T で１辺が x 軸に含まれ，その対辺の両端が C 上にあるものをすべて考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　長方形 T の周の長さの最大値を，a を用いて表せ．

(2)　長方形 T の面積の最大値を，a を用いて表せ．

(1)　$y=x^2-ax=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}=x(x-a)$　軸：$x=\dfrac{a}{2}$

よって，この関数のグラフは右図．また，題意の長方形 ABCD を右図のようにとり，A$(t,\ 0)$ とおくと，$\dfrac{a}{6}\leqq t<\dfrac{a}{2}$



また，B$(t,\ t^2-at)$，C$(a-t,\ t^2-at)$，D$(a-t,\ 0)$

長方形 T の周の長さを $l(t)$ とおくと

$$l(t)=2(\mathrm{AB}+\mathrm{AD})=2\{(-t^2+at)+(a-2t)\}=-2t^2+2(a-2)t+2a$$
$$=-2\left(t-\frac{a-2}{2}\right)^2+\frac{a^2+4}{2}$$

(i)　$\dfrac{a-2}{2}<\dfrac{a}{6}$　$(0<a<3)$ のとき　最大値は　$l\left(\dfrac{a}{6}\right)=\dfrac{5}{18}a^2+\dfrac{4}{3}a$

(ii)　$\dfrac{a}{6}\leqq\dfrac{a-2}{2}$　$(a\geqq 3)$ のとき　最大値は　$l\left(\dfrac{a-2}{2}\right)=\dfrac{a^2+4}{2}$

以上より，求める最大値は　**$0<a<3$ のとき $\dfrac{5}{18}a^2+\dfrac{4}{3}a$，$a\geqq 3$ のとき $\dfrac{a^2+4}{2}$**

(2)　長方形 T の面積を $S(t)$ とおくと

$$S(t)=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}=(-t^2+at)(a-2t)=2t^3-3at^2+a^2t$$

$$S'(t)=6t^2-6at+a^2 \qquad S'(t)=0 \text{ より}\quad t=\frac{3-\sqrt{3}}{6}a\quad\left(\frac{a}{6}\leqq t<\frac{a}{2}\text{ より}\right)$$

よって，$S(t)$ の増減は右のようになり，

求める最大値は $S\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}a\right)$ である．

t	$\frac{a}{6}$	$\cdots$	$\frac{3-\sqrt{3}}{6}a$	$\cdots$	$\frac{a}{2}$
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	最大	↘	

ここで，$S(t)\div S'(t)$ を計算することにより

$$S(t)=(6t^2-6at+a^2)\left(\frac{1}{3}t-\frac{a}{6}\right)-\frac{a^2}{3}t+\frac{a^3}{6}$$

よって，求める最大値は　$S\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}a\right)=-\dfrac{a^2}{3}\cdot\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}a+\dfrac{a^3}{6}=$ **$\dfrac{\sqrt{3}}{18}a^3$**

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　[1]　$f(x)=\int_0^2 |t(t-x)|dt$ について

(1)　$0 \leqq x \leqq 2$ のとき，$f(x)$ を求めよ．

(2)　$\int_{-1}^2 f(x+1)dx$ を求めよ．

(1)　$f(x)=\int_0^x \{-t(t-x)\}dt+\int_x^2 t(t-x)dt=\left[-\frac{t^3}{3}+\frac{x}{2}t^2\right]_0^x+\left[\frac{t^3}{3}-\frac{x}{2}t^2\right]_x^2$

$=-\frac{x^3}{3}+\frac{x^3}{2}+\frac{8}{3}-2x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^3}{2}=\boldsymbol{\frac{x^3}{3}-2x+\frac{8}{3}}$

(2)　$\int_{-1}^2 f(x+1)dx=\int_0^3 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx$

$2 \leqq x \leqq 3$ のとき　$f(x)=\int_0^2 \{-t(t-x)\}dt=\left[-\frac{t^3}{3}+\frac{x}{2}t^2\right]_0^2=2x-\frac{8}{3}$

よって　$\int_{-1}^2 f(x+1)dx=\int_0^2\left(\frac{x^3}{3}-2x+\frac{8}{3}\right)dx+\int_2^3\left(2x-\frac{8}{3}\right)dx$

$=\left[\frac{x^4}{12}-x^2+\frac{8}{3}x\right]_0^2+\left[x^2-\frac{8}{3}x\right]_2^3=\boldsymbol{5}$

3　[2]　$f(x)=4x^2-3ax+4\int_0^1 tf(t)dt$　……①，

$g(x)+\int_0^x (t+1)g'(t)dt=x^2+4x+a$　……②　のとき

(1)　$f(x)$ と $g(x)$ を求めよ．

(2)　方程式 $f(x)-xg(x)=0$ の 2 解を α，β として，

$h(a)=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta (3x^2-2ax+a^2)dx$ の最小値を求めよ．

(1)　$\int_0^1 tf(t)dt=k$ とおくと，$f(x)=4x^2-3ax+4k$

$k=\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 (4x^3-3ax^2+4kx)dx=1-a+2k$　これを解いて　$k=a-1$

よって　$\boldsymbol{f(x)=4x^2-3ax+4(a-1)}$

②の両辺を x で微分して　$g'(x)+(x+1)g'(x)=2x+4$　より　$(g'(x))x+2g'(x)=2x+4$

したがって　$g'(x)=2$　　また，②で $x=0$ のとき，$g(0)=a$ であるから　$\boldsymbol{g(x)=2x+a}$

(2)　$f(x)-xg(x)=2x^2-4ax+4(a-1)=0$の 2 解が α，β であることより，解と係数の関係から　$\alpha+\beta=2a$，$\alpha\beta=2(a-1)$　　よって　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4a^2-4a+4$

$h(a)=\frac{1}{\beta-\alpha}\left[x^3-ax^2+a^2x\right]_\alpha^\beta=\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2-a(\beta+\alpha)+a^2$

$=3a^2-2a+2=3\left(a-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{3}$

よって，最小値は $\boldsymbol{\frac{5}{3}}$　$\left(a=\frac{1}{3}のとき\right)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 　a を実数とし，$f(x)=x^3-3ax^2+2x+2$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　xy 平面において曲線 $y=f(x)$ の接線で傾きが m であるものが２本引けるとき，m の値の範囲を求めよ．

(2)　m が(1)で求めた範囲にあるとき，曲線 $y=f(x)$ の傾きが m である２本の接線の接点をそれぞれ P，Q とする．線分 PQ の中点 R の座標を求めよ．また，a がすべての実数値をとるとき，点 R が描く軌跡を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を $f(x)=3\int_{x-1}^{x}(s+|s|)(s+|s|-1)ds$ によって定める.

(1)　$f(x)$ を x の値について場合分けをして，x の多項式で表せ.

(2)　座標平面上に $y=f(x)$ のグラフをかけ.

(3)　x がすべての実数を動くときの $f(x)$ の最小値を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　微分法，積分法①　　練習問題　解答

> **1**　a を実数とし，$f(x)=x^3-3ax^2+2x+2$ とする．次の問いに答えよ．
> (1)　xy 平面において曲線 $y=f(x)$ の接線で傾きが m であるものが２本引けるとき，m の値の範囲を求めよ．
> (2)　m が(1)で求めた範囲にあるとき，曲線 $y=f(x)$ の傾きが m である２本の接線の接点をそれぞれ P，Q とする．線分 PQ の中点 R の座標を求めよ．また，a がすべての実数値をとるとき，点 R が描く軌跡を求めよ．

解答例

(1)　$f'(x)=3x^2-6ax+2=3(x-a)^2-3a^2+2$

接点の個数＝接線の本数

条件より，$f'(x)=m$ が異なる２実数解をもてばよい．

$y=f'(x)$ と $y=m$ のグラフが２交点をもつことより，

求める条件は $\boldsymbol{m>-3a^2+2}$

判別式 >0 で求めても可．

(2)　(1)のとき，$3x^2-6ax+2-m=0$ の異なる２実数解を α，β とおくと，解と係数の関係より　$\alpha+\beta=2a$，$\alpha\beta=\dfrac{2-m}{3}$　この α，β が接点 P，Q の x 座標である．

P$(\alpha,\ f(\alpha))$，Q$(\beta,\ f(\beta))$ とすると

$$\begin{aligned}
f(\alpha)+f(\beta)&=(\alpha^3-3a\alpha^2+2\alpha+2)+(\beta^3-3a\beta^2+2\beta+2)\\
&=(\alpha^3+\beta^3)-3a(\alpha^2+\beta^2)+2(\alpha+\beta)+4\\
&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)-3a\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+2(\alpha+\beta)+4\\
&=8a^3-3\cdot\frac{2-m}{3}\cdot 2a-3a\left(4a^2-2\cdot\frac{2-m}{3}\right)+2\cdot 2a+4\\
&=8a^3-2(2-m)a-12a^3+2(2-m)a+4a+4\\
&=-4a^3+4a+4
\end{aligned}$$

m は消えてしまう．つまり点 R は m によらない点である．

よって，線分 PQ の中点を R$(X,\ Y)$ とすると

$$X=\frac{\alpha+\beta}{2}=a$$

$$Y=\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}=-2a^3+2a+2$$

よって　$\mathbf{R}\boldsymbol{(a,\ -2a^3+2a+2)}$

この点 R は $y=f(x)$ 上の点であり
さらに $y=f(x)$ のグラフの「変曲点」である．傾きが同じ(＝平行)である２接線で，接点(を結ぶ線分)の中点が，この３次関数のグラフの対称点である変曲点であることはうなずけるはずである．

a がすべての実数値をとるとき，求める点 R の軌跡は

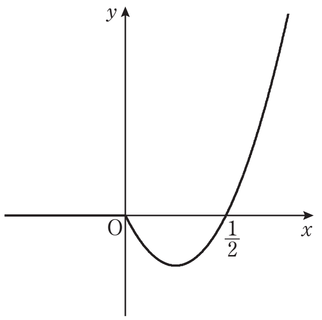
曲線 $\boldsymbol{y=-2x^3+2x+2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

|2| 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を $f(x)=3\int_{x-1}^{x}(s+|s|)(s+|s|-1)ds$ によって定める．

(1) $f(x)$ を x の値について場合分けをして，x の多項式で表せ．
(2) 座標平面上に $y=f(x)$ のグラフをかけ．
(3) x がすべての実数を動くときの $f(x)$ の最小値を求めよ．

$$(s+|s|)(s+|s|-1)=\begin{cases}2s(2s-1) & (s\geqq 0)\\ 0 & (s<0)\end{cases}$$



$y=(s+|s|)(s+|s|-1)$

(1) (i) $x<0$ のとき　$f(x)=0$

$\int_a^b 0\,ds=0$ である．

(ii) $x-1\leqq 0\leqq x$　つまり　$0\leqq x\leqq 1$ のとき

$$f(x)=3\int_{x-1}^{0}0ds+3\int_{0}^{x}2s(2s-1)ds$$
$$=0+\left[4s^3-3s^2\right]_0^x=4x^3-3x^2$$

インテグラルの分割

(iii) $x-1>0$　つまり　$1<x$ のとき

$$f(x)=3\int_{x-1}^{x}2s(2s-1)ds$$
$$=\left[4s^3-3s^2\right]_{x-1}^{x}=12x^2-18x+7$$

以上より

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ 4x^3-3x^2 & (0\leqq x\leqq 1)\\ 12x^2-18x+7 & (1<x)\end{cases}}$$

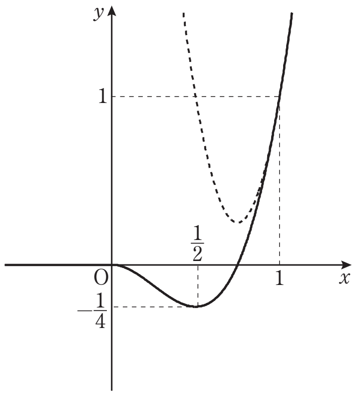
(2) $0\leqq x\leqq 1$ のとき　$f'(x)=12x^2-6x=6x(2x-1)$

また，$1<x$ のとき　$f(x)=12\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{4}$ より

$1<x$ において $f(x)$ は単調増加．

よって，$y=f(x)$ のグラフは右図．

x	0	…	$\frac{1}{2}$	…	1
$f'(x)$	0	−	0	＋	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	1



(3) (2)のグラフより $f(x)$ の最小値は

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{-\frac{1}{4}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。